УДК 519.862.6

Т.А. ЕРИНА

T.A.ERINA

**О классификации и идентификации моделей временных рядов**

**On the classification and identification of time series models**

*В данной статье автор освещают проблему классификации и идентификации моделей временных рядов на основе признаков стационарности, гетероскедастичности, а также рассматривает методы проверки временных рядов на стационарность и приведения их к стационарному виду.*

*Ключевые слова: временные ряды, модели, стационарность, лаги, регрессия, процессы.*

*In this article, the author highlights the problem of classification andidentifying feature-based time series modelsstationarity, heteroscedasticity, and also considers methods for checking time series for stationarity and reducing them to a stationary form.*

*Key words: time series, model, stationarity, lags, regression, processes.*

Большое количество временных рядов нестационарны, однако, многие методы и модели основаны на предположении о стационарности временных рядов. Поэтому актуальной является проблема классификации и идентификации моделей временных рядов.

Рассмотрим авторегрессионный процесс порядка р. Пусть он является стохастическим процессом *Xt ,*названным-[AR(p)].



где *at —* «белый шум», свободный член *ф0=0*.

Используя функцию оператора лага 

запишем краткое представление модели процесса : . (1)

Стационарность процессов AR не всегда однозначна. Выяснение вопроса о стационарности процесса связано с решением характеристического уравнения: или  где z — комплексное число. Стационарность AR-процесса зависит от следующего условия (необходимое и достаточное): AR-процесс является стационарным тогда и только тогда, ког­да его комплексные решения (корни) лежат вне единичного круга, т.е. |z|> 1.

Если |z| = 1, то процесс является нестационарным и называется процессом единичного корня.

Далее обратим внимание на процесс, представляющий собой линейную комбинацию двух элементов «белого шума», следующих друг за другом:  (2),

где *at* — «белый шум» с μ=0.

В этом случае *Xt*, представленный формулой (2) называется процессом скользящего среднего первого порядка МА(1). Также можно представить процесс скользящего среднего порядка q [MA(q)] :.

Процесс MA(q) запишем короче, введя оператор обратного действия L:



выполнив замену и используя функцию оператора:





Тогда процесс MA(q) определяется следующим образом:

 (3).



Рассматриваемый процесс имеет среднюю, дисперсию и ковариацию, не зависящую от времени. Поэтому, МА- процессы являются стационарными в слабом смысле.

Совокупность процессов авторегрессии и скользящего среднего (AR и МА) порядков p и q соответственно называется авторегрессионным процессом скользящего среднего [ARMA(p,q)] и представляется:



Краткая запись процесса ARMA(p,q):



где Ф*р* (L) и Θ*q*(L) - функции операторов лага соответствующих AR(p) и MA(q) процессов и *ф0*=0.

Заметим, что стационарные процессы AR и МА могут быть взаимно представимы: AR модели как бесконечные МА -процессы, и наоборот (при условии обратимости). Однако, на практике, анализируя реальные временные ряды, следует выбирать модели процесса, где число параметров наименьше. При выборе модели процесса также следует учитывать тот факт, что ARMA-процессы характеризуются меньшим количеством параметров, чем AR- или МА-процессы, хотя при этом имеют более сложную структуру.

Отметим еще один тип моделей временных рядов, которые учитывают специфическую зависимость ошибок регрессии. Запишем модель регрессии:

yt=βxt+δt (4),

где yt ,xt – стационарные временные ряды.

Пусть модель (4) удовлетворяет условиям: Mδ(t-1) (δt)=0 (5)

Dδ(t-1) (δt)=α0+α1σ2t-1 (6)

σ2t-1= D (δt-1). (7)

Условия (6) и (7) показывают, что отклонение от прогнозируемого значения в предыдущем наблюдении с большой вероятностью приводит к еще большему отклонению в последующем наблюдении. Кроме того, эти условия означают наличие условной гетероскедастичности ошибок регрессии.

Модель (4), удовлетворяющая условиям (5)-(7), принято называть: авторегрессионная условно гетероскедастичная модель или ARCH-модель. В эту модель можно ввести обобщение для дисперсии: Dδ(t-1)… δ(t-p) (δt)=α0+α1δ2t-1+…+αpδ2t-p,

тогда модель будет называться ARCH(p)-модельp-го порядка.

Еще большее обобщение зависимости условной дисперсии приводит к получению *обобщенной* авторегрессионнай условно гетероскедастичной модели или GARCH(p,q)-моделипорядков p и q.

Анализируя рассмотренные модели ARCH и GARCH, приходим к выводу о том, что они условиям классической модели стационарных процессов. При этом обыкновенный метод наименьших квадратов позволяет получать линейные оценки параметров, а более эффективные нелинейные оценки можно получить методом максимального правдоподобия.

Итак, мы рассмотрели основные регрессионные модели вида yt=βxt+δt , которые применяются для стационарных временных рядов. При рассмотрении в основном имелась в виду стационарность ряда остатков, а сами ряды yt и xt могли быть нестационарными из-за наличия тренда. После выделения тренда все ряды оказываются стационарными. Однако на практике такая ситуация возникает редко. И здесь возникает проблема моделирования нестационарных временных рядов, или приведения их к стационарным, избегая явления *ложной регрессии*.

Довольно часто взятие разностей временных рядов позволяет получить стационарные временные ряды.

Для стохастического процесса первые разности имеют вид:

.

Для сезонного процесса, где длина периода s:



В случае, когда первые разности ряда Xt стационарны, ряд называется интегрируемым первого порядка.

Если это не так, то берутся вторые разности:

.

Если полученный ряд стационарен, то ряд Xt называется интегрируемым второго порядка. Если мы получаем первый стационарный ряд после k-кратного взятия разностей, процесс называется интегрируемым k-го порядка. Таким образом на k шаге мы получим стационаоный ряд и построим его модель. Такой процесс приведения ряда к стационарности получил название – метод разностей.

Рассмотрим авторегрессионный процесс Yt первого порядка:

. (8)

Не составляет труда убедиться, что при  условия стационарности процесса выполняются, а при - не выполняются. Значит в первом случае процесс стационарен, а во втором – нестационарен. При  процессы называют процессами единичного корня.

Для проверки на стационарность временного ряда, как правило, применяют интеграционную статистику Дарбина-Уотсона (IDW-статистика) следующего вида:

,

где *уt,* - временной ряд, являющийся реализацией процесса Yt;

 - выборочное среднее *уt*.

Если временной ряд *уt*– нестационарный и в уравнении (8) α1 = 1, тогда имеем выражение в числителе . Для нестационарного ряда это отношение будет примерно равно 0. Таким образом, можно сказать, что процесс *yt* - не стационарный, если значение IDW ≈ 0, и *yt* - стационарный, если значение IDW ≈ 2.

Если стационарный ряд при этом идентифицируется и описывается моделью ARMA(p,q), то нестационарный ряд описывается ARIMA(p,q,k)-моделью. ARIMA(p,q,k)-модель авторегрессии – проинтегрированной скользящей средней порядков p,q,k. Ее называют модель Бокса-Дженкинса. Она достаточно успешно описывает поведение нестационарных временных рядов.

Отметим, что мы рассмотрели лишь некоторые вопросы, связанные с классификацией и идентификацией стационарных и нестационарных временных рядов, а также затронули основные проблемы, возникающие при их моделировании. В заключении напомним, что процедуры подбора моделей временных рядов, а также процедуры проверки их на стационарность реализованы во многих эконометрических пакетах, например «EconometricViews» .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Айвазян С.А. Основы эконометрики Т. 2. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 284 с.

2. Берндт Э.Р. Практика эконометрики. Классика и современность/ Пер. с англ. под ред. С.А. Айвазяна. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 137 с.

3. Дайитбегов Д.М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике. – М.: Инфа-М – Вузовский учебник, 2008.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 548 с.

**Ерина Татьяна Анатольевна**

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород

К.п.н., доцент кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

Тел.: +7 915 570 60 77

E-mail: erina@bsu.edu.ru